

1

図1のように軽い糸の上端を固定し、下端に小さなおもりをつけ、固定した点を含む鉛直面内で糸を左右に振動させる。糸の長さを l [m]、おもりの質量を m [kg] として、重力の加速度を g [m/s²] とする。糸が鉛直線となす角を、右向きを正として θ [rad] とする。糸が鉛直方向の時のおもりの位置を点Oとし、点Oから円周に沿ったおもりの変位を、右向きを正として x [m] とする。角 α [rad] ($\alpha > 0$) を用いて、振幅を $l\alpha$ [m] とする。糸は伸びないとし、空気の抵抗等による振動の減衰は無視してよいとする。ここでは振幅は小さいとするが、ごく小さいとはいえず、単振動とは見なせないとする。

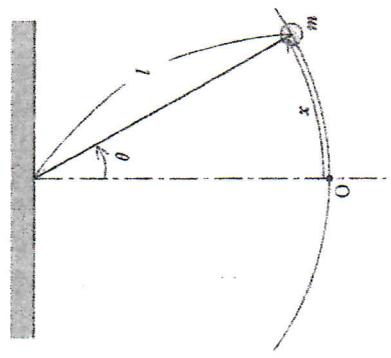


図1

- (1) 角 θ をなす瞬間に、おもりにはたらく重力の糸が引く方向の成分 F_s の大きさを求めよ。
- (2) 点Oでの速度 v を α を用いて表せ。
- (3) おもりが点Oの速さで点Oを通過する瞬間に、糸の引く力の大きさ S を求めよ。
- (4) 角 θ をなす瞬間に、おもりにはたらく重力の円周方向の成分 F_t を求めよ。
- (5) 角 θ と重力の円周方向の成分 F_t の大きさの関係をグラフに実線(——)で描け。角 θ を横軸とし力を縦軸として、 $0 \leq \theta \leq \alpha$ の範囲とする。

(6) θ がごく小さいときは $\sin \theta \approx \theta$ と近似できる。 $0 \leq \theta \leq \alpha$ の範囲ではこの近似はよくないが、この近似を用いた場合の重力の円周方向の成分を F_t とする。角 θ と力 F_t の大きさの関係を(5)のグラフに破線(-----)で描け。特に $0 \leq \theta \leq \alpha$ の範囲における力の大きさの相違に注意して描くこと。

(7) θ は小さいので $\sin \theta \approx \theta + k\theta^3$ と近似できるとする (k は小さい)。左側に振動することから、 θ^3 の項がないことの意味を簡潔に述べよ。またグラフにおける力 F_t と F_s との違いから k の符号を考察せよ。

(8) (7)の近似を用いると θ がごく小さいと $\sin \theta \approx \theta$ であり、それ以外は $\sin \theta \approx \theta(1 + k\theta^2)$ である。そこでごく小さいときからの違いを見るために以下では $\sin \theta \approx \theta(1 + k\theta^2)$ と近似して考える。この近似を用いた場合の重力の円周方向の成分を F_t とする。角 θ と力 F_t の大きさの関係を(5)のグラフに点線(.....)で描け。特に $0 \leq \theta \leq \alpha$ の範囲における力の大きさの相違に注意して描くこと。

(9) (8)の近似を用いた場合(力 F_t の場合)の振動の周期 T [s] を求めよ。

2 以下の(1)~(12)に当てはまる式を答え。(7)~(11)には当てはまる語句を下記解答群より選べ。また、文末の間1に答えよ。

図2のような長方形の1回巻きのコイル(コイル全体の電気抵抗を $R[\Omega]$ とする)を考える。辺AB, CDの長さを $2a[m]$ 、辺BC, DAの長さを $b[m]$ とする。

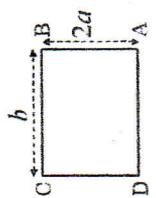


図2

水平な床の面に x 軸, y 軸を定義し, 床に垂直で上向きに z 軸を定義する。その床の上に水平に置かれたこのコイルの x 軸方向の運動を考える(図3)。コイルの位置を, 頂点Aの x 座標 x_A , y 座標 y_A , z 座標 z_A で表す。辺CBの方向は x 軸と平行とする。ガイドレールによりコイルの向きは変化せず, x 軸方向の運動だけが可能となっており, y_A と z_A は $y_A = -l[m]$ ($0 < l < a$), $z_A = 0[m]$ で変化しない。なおコイルと床の摩擦およびコイルとガイドレールの摩擦は無視してよいとする。

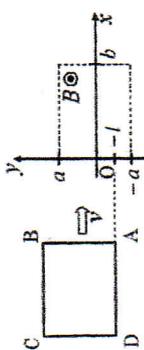


図3

ここで $0 \leq x \leq b$ かつ $-a \leq y \leq a$ の領域に, 床に垂直で上向き(z 軸正方向)に一樣な磁場が存在するとし(図3), その磁束密度の大きさを $B[T]$ とする。コイルは $x_A < 0$ の位置よりこの磁場の領域を横切って x 軸正方向に一定の速さ $v[m/s]$ で移動している。 $x_A < 0$ ではコイルに電流は流れていないとする。 $x_A = 0$ となつてからの経過時間を $t[s]$ とする。

(A) コイルの位置が $0 \leq x_A \leq b$ の範囲において考える。
 x_A を用いて書くと, コイル内を貫く磁束は(1) [Wb] となつていく。したがって, $A \rightarrow B \rightarrow C$ の向きに電流を流す起電力の向きを正の向きとして, このコイルに生じる誘導起電力は(2) [V] と書ける。以下の(a)(b)では, コイルの自己インダクタンスを無視する場合と考慮する場合でのコイルに流れる電流などを求める。

(ア)(イ)の解答群)

- x 軸正方向, x 軸負方向, y 軸正方向, y 軸負方向, z 軸正方向,
- z 軸負方向, なし(力が働かないときに選択すること)
- (a) コイルの自己インダクタンスを無視する場合
- コイルに流れる電流は $A \rightarrow B \rightarrow C$ の向きを正の向きとして(3)
- [A] と書ける。この電流の流れる導線の磁場から力を受けるが, そ

の力の向きは辺ABにおいては(7), 辺DAにおいては(4)となる。一定の速さ v でコイルを運動させるために必要な x 軸方向の力の大きさは(4) [N] となる。したがって, $x_A = 0$ から $x_A = b$ までの間にこの力がコイルにする仕事は(5) [J] となる。

(b) コイルの自己インダクタンスを考慮する場合

1 回巻きのコイルの自己インダクタンスは小さいが, ここではその自己インダクタンスが無視できるほど小さくはないとして考え, コイルの自己インダクタンスを $L[H]$ とする。経過時間 t のときにコイルに流れる電流を $I[A]$ とし, 微小な時間 $\Delta t[s]$ 経過後の電流を $I + \Delta I[A]$ とする。コイルの運動による誘導起電力に加えて, 時間 Δt の間に電流が $\Delta I[A]$ だけ変化するときコイルに発生する誘導起電力も考慮して回路を考え, 関係は微小時間あたりの電流変化 $\frac{\Delta I}{\Delta t} = (6)$ とまとめられる。ここで, $t = 0$ では $\frac{\Delta I}{\Delta t} = (7)$ となるので, $t = 0$ から $\Delta t[s]$ 経過後の電流は $A \rightarrow B \rightarrow C$ の向きを正の向きとして $I + \Delta I = (8)$ [A] となる。

次に, 経過時間 t から Δt だけ経過する間において, 一定の速さ v でコイルを運動させるために必要な力がする仕事について考える。この間にコイルに流れる電気量は $I\Delta t[C]$ と見なせる。この間の電流は I で一定としてよい。このとき, t から $t + \Delta t$ の間に力がする仕事は(9) [J] であり, コイルの抵抗 R で発生する熱量は(10) [J] である。また, この間にコイルに蓄えられるエネルギーの変化量は, ΔI の1次まで考えると ΔI を用いて(11) [J] となり, $\frac{\Delta I}{\Delta t} = (6)$ の関係をj用いてまとめると(12) [J] となる。

(B) コイルの位置が $0 \leq x_A \leq 2b$ の範囲全体を考える。

問1 自己インダクタンスを考慮する場合に, コイルを一定の速さ v [m/s] で x 軸正方向へ運動させる間に流れる電流の特徴を $0 \leq x_A \leq 2b$ の範囲にわたつてグラフに描け。ここで, x_A を横軸, 電流を縦軸とする。ただし, 自己インダクタンスは小さく, $x_A = b$ に達する前に微小時間あたりの電流変化はいったん $0[A]$ と見なせるようになり, $x_A = b$ を通過後に電流変化が生じるが $x_A = 2b$ に達する前に再び微小時間あたりの電流変化は $0[A]$ と見なせるようになる。なお, $x_A = b$, $x_A = 2b$ における電流の大きさを求める必要はない。

3

空気を二原子分子の理想気体と見なし、1モルの空気の状態変化について、以下の(1)~(6)に当てはまる式を答えよ。必要なら気体定数を R とせよ。

1モルの空気に熱量 Q が加えられたとき、体積が一定のもので温度が ΔT だけ上昇したとすると、このとき、定積モル比熱 c_v と Q の関係は $c_v =$ (1) と書ける。この変化において内部エネルギーの増加分が ΔU であったとすると、 ΔU を用いて $c_v =$ (2) と書くこともできる。また、1モルの空気に熱量 Q' が加えられたとき、圧力 p が一定の状態では温度が ΔT だけ上昇したとすると、このとき、内部エネルギーの増加分が ΔU で体積の増加分が ΔV であったとすると、定圧モル比熱 c_p と ΔU 、 ΔV の関係は $c_p =$ (3) と書ける。したがって、1モルあたりの理想気体の状態方程式を用いると、 c_v と c_p の関係は $c_p =$ (4) となる。ここで、単原子分子の理想気体の内部エネルギーが絶対温度に比例するのと同様に、二原子分子の理想気体でも内部エネルギーは絶対温度に比例するとしてよく、絶対温度が T のときの空気の内部エネルギーは1モルあたり $U = \frac{5}{2} RT$

となる。したがって、空気の定積モル比熱は $c_v =$ (5) となる。

ここで、1モルの空気が、断熱変化により圧力 p 、体積 V 、絶対温度 T の状態から圧力 $p + \Delta p$ 、体積 $V + \Delta V$ 、絶対温度 $T + \Delta T$ の状態になった場合を考える。このとき、内部エネルギーの変化 ΔU と体積変化 ΔV などの関係は (6) となる。(2)を用いてこの式を書きかえると (7) となる。断熱変化の後の理想気体の状態方程式と断熱変化の前の理想気体の状態方程式とを比較し、 ΔV 、 Δp 、 ΔT のうち2つ以上の積は他の項に比べて無視できると仮定すると、 ΔT と ΔV 、 Δp の関係は $R\Delta T =$ (8) と書ける。したがって、この式と(7)より ΔT を消去すれば、 ΔV と Δp の関係は $\frac{c_p}{c_v}$ を用いて (9) と書ける。

以下では海面からの高さ h と圧力、温度について考える。

海面から高さ h のところにある1モルの空気の圧力が p 、体積が V 、絶対温度が T であったとすると、空気1モルあたりの質量 m と空気の密度 ρ を用いると $V =$ (10) となるので、 ρ を p 、 T を用いて表すと (11) となる。この高さより Δh だけ高さが下がったところで圧力が $p + \Delta p$ となっていたと、簡単のために高さが変わっても温度 T は変わらないと仮定する。以下の計算では必要な重力加速度を g とする。 Δh と ρ を用いて

$$\Delta p = \text{(12)} \quad \text{と書けるので、} \quad \frac{\Delta p}{\Delta h} \text{ は } p, T \text{ の関数として } \text{(13)} \quad \text{と書ける。}$$

空気のかたまりが上空より下降してくる場合を考える。空気は熱の伝わりがよくないのでこのときの変化は断熱変化と考えてよい。海面から高さ h のところにある圧力 p 、体積 V 、絶対温度 T の1モルの空気が下降し、海面からの高さが $h - \Delta h$ のところで圧力が $p + \Delta p$ 、体積が $V + \Delta V$ 、絶対温度が $T + \Delta T$ となったとすると、このとき $R\Delta T$ が(8)と書けることより、

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p}{p} \text{ と } \frac{\Delta V}{V} \text{ と } \frac{\Delta T}{T} \text{ の関係式は } \text{(14)} \quad \text{となる。これと(9)より、} \quad \frac{\Delta T}{\Delta p} \\ = \text{(15)} \quad \text{となる。したがって、(13)と(15)より} \quad \frac{\Delta T}{\Delta h} = \text{(16)} \quad \text{となる。} \end{aligned}$$